Total No. of Questions : 8] *[Total No. of Printed Pages : 4*

Roll No

BT-102 (GS)

B.Tech., I & II Semester

Examination, November 2022

Grading System (GS)

Mathematics-I

Time : Three Hours ***Maximum Marks : 70***

Note: i) Attempt any five questions.

किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.

सभी प्रश्नों के समान अंक हैं।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.

किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Prove that $\frac{\pi}{3}-\frac{1}{5\sqrt{3}} > \cos^{-1}\frac{3}{5} > \frac{\pi}{3}-\frac{1}{8}$ using Lagrange's mean value theorem.

Lagrange's के माध्य मान प्रमेय का उपयोग कर

$\frac{\pi}{3}-\frac{1}{5\sqrt{3}} > \cos^{-1}\frac{3}{5} > \frac{\pi}{3}-\frac{1}{8}$ साबित करें।

b) Find the minimum and maximum value of $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$.

$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिये।

2. a) Find C of Cauchy's Mean value theorem on $[a, b]$ for the function $f(x) = e^x$ and $g(x) = e^{-x}, (a, b > 0)$.

$f(x) = e^x$ और $g(x) = e^{-x}, (a, b > 0)$ के फलन के लिए $[a, b]$ पर Cauchy के माध्य मान प्रमेय का C ज्ञात कीजिये।

b) Prove that $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

साबित करें कि $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

3. a) By Changing the order of integration, evaluate

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy\, dx$$

एकीकरण के क्रम को बदलकर, $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy\, dx$ का मूल्यांकन करें।

b) Find the area of a plane in the form of a quadrant of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के चतुर्भुज के रूप में एक समतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

Contd...

4. Let W be a subspace of a finite dimensional vector space V(F). Then dim(V/W) = dim V − dim W.
मान लीजिए कि W एक परिमित आयामी वेक्टर स्पेस V(F) का एक सब स्पेस है। फिर dim(V/W) = dim V − dim W।

5. Obtain the Fourier series to represent $f(x) = x \sin x,\ 0 < x < 2\pi$.
$f(x) = x \sin x, 0 < x < 2\pi$ का प्रतिनिधित्व करने के लिए फूरियर श्रृंखला प्राप्त करें।

6. a) Show that $T : V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ is defined as $T(a, b) = (a - b, b - a, -a)$ is linear transformation.
दिखाएँ कि $T : V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ को $T(a,b) = (a-b, b-a, -a)$ के रूप में परिभाषित किया गया है, रैखिक रूपांतरण है।

b) Test the convergence of the series
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$
श्रृंखला के अभिसरण का परीक्षण करें
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$

7. a) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix
$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Hence find A^{-1}.
सत्यापित करें Cayley-Hamilton के लिए हैमिल्टन प्रमेय
$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ । अतः A^{-1} ज्ञात कीजिये।

b) Examine the consistency of the system of the following equations. If consistent, solve the equation's.
निम्नलिखित समीकरणों के सिस्टम की स्थिरता की जांच करें। यदि सुसंगत हैं, तो समीकरण को हल करें।
$x + y + z = 3$
$x + 2y + 3z = 4$
$x + 4y + 9z = 6$

8. Diagonalize the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ को विकर्णीकृत करें।

******